Geometria Intrínseca das Superfícies

Paula Gonçalves Correia

Romildo da Silva Pina *

Goiânia 15 de Junho de 2011

Resumo

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre superfícies regulares, geometria intrínseca das superfícies e superfícies completas. Abrangemos definições, propriedades e resultados importantes sobre as superfícies regulares e as completas, dentre os quais destacamos os teoremas de Gauss, de Bonnet e de Hopf-Rinow.

Palavras chaves: superfícies regulares, geometria intrínseca e superfícies completas.

1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar as superfícies regulares, a geometria intrínseca destas superfícies e as superfícies completas, a fim de utilizar os conhecimentos adquiridos em estudos posteriores.

2 Introdução

A geometria diferencial de superfícies abrange estudos nos aspectos local e global. Chamamos de aspecto local àquele em que estudamos conceitos, propriedades e resultados observados na vizinhança de um ponto da superfície. Já o aspecto global se refere

*Relatório de Iniciação Científica da orientanda Paula Gonçalves Correia, orientada pelo professor Romildo da Silva Pina (E-mail:`romildo@mat.ufg.br`). IME/UFG, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil - *revisado pelo orientador*.

à superfície em sua totalidade. Trataremos aqui desses dois aspectos, restringindo-nos às superfícies regulares e às completas.

O conteúdo deste trabalho está dividido em duas seções, enumeradas por 3 e 4. Na seção 3 está exposta a teoria das superfícies regulares, abrangendo os conceitos de função diferenciável definida em uma superfície, plano tangente, primeira e segunda formas fundamentais e aplicação normal de Gauss, juntamente com as propriedades e resultados relacionados a esses conceitos. Já na seção 4 está uma breve apresentação da geometria intrínseca das superfícies e das superfícies completas, incluindo transporte paralelo e geodésicas.

3 Superfícies Regulares

Nesta seção introduziremos a noção de uma superfície regular em $I\!R^3$ e alguns conceitos relacionados a essas superfícies.

Definição 1. *Um subconjunto $S \subset I\!R^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $I\!R^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ de um aberto U de $I\!R^2$ sobre $V \cap S \subset I\!R^3$ tal que*

1. *$\mathbf{x}$ é diferenciável. Isto significa que se escrevermos*

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \qquad (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.

2. *$\mathbf{x}$ é um homeomorfismo. Como $\mathbf{x}$ é contínua pela condição 1, isto significa que $\mathbf{x}$ tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ que é contínua.*

3. *(condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : I\!R^2 \to I\!R^3$ é injetiva.*

A aplicação $\mathbf{x}$ é chamada uma **parametrização** ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p. A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada uma **vizinhança coordenada**.

Exemplo 1. *A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in I\!R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular. De fato, as parametrizações*

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\ ),$$

$$\mathbf{x}_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-(x^2+y^2)}\ ),$$

$$\mathbf{x}_3(x,z) = (x, +\sqrt{1-(x^2+z^2)}\ , z),$$

$$\mathbf{x}_4(x,z) = (x, -\sqrt{1-(x^2+z^2)}\ , z),$$

$$\mathbf{x}_5(y,z) = (+\sqrt{1-(y^2+z^2)}\ , y, z),$$

$$\mathbf{x}_6(y,z) = (-\sqrt{1-(y^2+z^2)}\ , y, z),$$

cobrem inteiramente S^2 *e satisfazem a Def.* 1.

Proposição 1. *(Mudança de Parâmetros). Seja* p *um ponto de uma superfície regular* S*, e sejam* $\mathbf{x} : U \subset I\!R^2 \to S$ *e* $\mathbf{y} : V \subset I\!R^2 \to S$ *duas parametrizações de* S*, tais que* $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$*. Então a mudança de coordenadas* $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ *é um difeomorfismo; isto é,* h *é diferenciável e tem uma inversa diferenciável* h^{-1}*.*

Em seguida definiremos função diferenciável em uma superfície regular.

Definição 2. *Seja* $f : V \subset S \to I\!R$ *uma função, definida em um subconjunto aberto* V *de uma superfície regular* S*. Então* f *é* ***diferenciável*** *em* $p \in V$ *se, para alguma parametrização* $\mathbf{x} : U \subset I\!R^2 \to S$*, com* $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$*, a composição* $f \circ \mathbf{x} : U \subset I\!R^2 \to I\!R$ *é* ***diferenciável*** *em* $\mathbf{x}^{-1}(p)$*. A função* f *é diferenciável em* V *se é diferenciável em todos os pontos de* V*.*

Como consequência imediata da proposição anterior, segue que a definição dada acima não depende da escolha da parametrização $\mathbf{x}$.

Uma aplicação contínua $\psi : V_1 \subset S_1 \to S_2$, de um conjunto aberto V_1 de uma superfície regular S_1 em uma superfície regular S_2, é diferenciável em $p \in V_1$ se, dadas parametrizações

$$\mathrm{x}_1 : U_1 \subset I\!R^2 \to S_1, \qquad \boldsymbol{x}_2 : U_2 \subset I\!R^2 \to S_2,$$

com $p \in \boldsymbol{x}_1(U_1)$ e $\psi(\mathrm{x}_1(U_1)) \subset \mathrm{x}_2(U_2)$, a aplicação

$$\mathrm{x}_2^{-1} \circ \psi \circ \mathrm{x}_1 : U_1 \to U_2$$

é diferenciável em $q = \mathrm{x}_1^{-1}(p)$.

Duas superfícies regulares S_1 e S_2 são **difeomorfas** se existe uma aplicação diferenciável $\psi : S_1 \to S_2$ com uma inversa diferenciável $\psi^{-1} : S_2 \to S_1$. Uma tal ψ é chamada um **difeomorfismo** de S_1 em S_2.

Exemplo 2. *Se* $\mathbf{x} : U \subset I\!R^2 \to S$ *é uma parametrização,* $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to I\!R^2$ *é diferenciável. Com efeito, para qualquer* $p \in \mathbf{x}(U)$ *e qualquer parametrização* $\mathbf{y} : V \subset I\!R^2 \to S$ *em* p*, temos que* $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$*, onde*

$$W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V),$$

é diferenciável. Isso mostra que U *e* $\mathbf{x}(U)$ *são difeomorfos (isto é, toda superfície regular é localmente difeomorfa a um plano).*

Entendemos por **vetor tangente** a S, em um ponto $p \in S$, o vetor tangente $\alpha^{'}(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 2. *Seja* $\mathbf{x} : U \subset I\!R^2 \to S$ *uma parametrização de uma superfície regular* S *e seja* $q \in U$*. O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\mathbf{x}_q(I\!R^2) \subset I\!R^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a S *em* $\mathbf{x}(q)$*.*

Pela proposição acima, o plano $d\mathtt{x}_q(I\!R^2)$, que passa por $\mathtt{x}(q) = p$, não depende da parametrização $\mathtt{x}$.

Proposição 3. *Se* S_1 *e* S_2 *são superfícies regulares e* $\psi : U \subset S_1 \to S_2$ *é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto* $U \subset S_1$ *tal que a diferencial,* $d\psi_p$*, de* ψ *em* $p \in U$ *é um isomorfismo, então* ψ *é um difeomorfismo local em* p*.*

Definição 3. *A forma quadrática* I_p *no plano tangente* T_pS *em* p *definida por*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

é chamada a ***primeira forma fundamental*** *da superfície regular* $S \subset I\!R^3$ *em* $p \in S$*.*

Como um vetor tangente $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathtt{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathtt{x}(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha^{'}(0)) &= \left\langle \alpha^{'}(0), \alpha^{'}(0) \right\rangle_p \\ &= \left\langle \mathtt{x}_u u^{'} + \mathtt{x}_v v^{'}, \mathtt{x}_u u^{'} + \mathtt{x}_v v^{'} \right\rangle_p \\ &= \langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_u \rangle_p (u^{'})^2 + 2 \langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v \rangle_p u^{'} v^{'} + \langle \mathtt{x}_v, \mathtt{x}_v \rangle_p (v^{'})^2 \end{aligned}$$

$$= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathtt{x}_v, \mathtt{x}_v \rangle_p$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v\}$ de T_pS.

Exemplo 3. *O cilindro reto sobre o círculo* $x^2+y^2 = 1$ *admite a parametrização* $\mathbf{x} : U \to I\!R^3$, *onde*

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

$$U = \{(u, v) \in I\!R^2; \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty\}.$$

Para calcular a primeira forma fundamental, notamos que

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \qquad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

e portanto

$$E = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

A importância da primeira forma fundamental I vem do fato de que, conhecendo I, podemos tratar questões métricas sobre uma superfície regular, sem fazer referência ao espaço ambiente $I\!R^3$. Assim, o comprimento de arco s de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ é dado por

$$s(t) = \int_o^t \left|\alpha'(t)\right| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))}dt.$$

Se $\alpha(t) = \mathtt{x}(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente à parametrização $\mathtt{x}(u, v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α entre, digamos, 0 e t por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt.$$

O ângulo θ de duas curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \to S$, $\beta : I \to S$ que se intersectam em $t = t_0$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)|\,|\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo ϕ das curvas coordenadas de uma parametrização $\mathtt{x}(u, v)$ é

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v \rangle}{|\mathtt{x}_u|\,|\mathtt{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Definição 4. *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. O número positivo*

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| \, dudv = A(R) \qquad Q = x^{-1}(R),$$

é chamado ***área*** *de R.*

Convém notar que a área definida da forma acima não depende da parametrização $\mathtt{x}$, e

$$|\mathtt{x}_u \wedge \mathtt{x}_v|^2 + \langle \mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v \rangle^2 = |\mathtt{x}_u|^2 \, |\mathtt{x}_v|^2 ,$$

o que mostra que o integrando de $A(R)$ pode ser escrito como

$$|\mathtt{x}_u \wedge \mathtt{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Dada uma parametrização $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, podemos escolher, para cada ponto de $\mathtt{x}(U)$, um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{\mathtt{x}_u \wedge \mathtt{x}_v}{|\mathtt{x}_u \wedge \mathtt{x}_v|}(q), \qquad q \in \mathtt{x}(U).$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável $N : \mathtt{x}(U) \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in \mathtt{x}(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

Em geral, $V \subset S$ é um conjunto aberto de S e $N : V \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q, dizemos que N é **um campo diferenciável de vetores normais unitários em V**.

Uma superfície regular é **orientável** se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície; a escolha de tal campo N é chamada uma **orientação** de S.

Definição 5. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

A aplicação $N : S \to S^2$, assim definida, é chamada a ***aplicação de Gauss*** *de S.*

A aplicação de Gauss é diferenciável, e a diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}S^2$. Como T_pS e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em T_pS.

A aplicação linear $dN_p : T_pS \to T_pS$ opera da seguinte maneira. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S, com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS.

Exemplo 4. *Para um plano P dado por $ax + by + cz + d = 0$, o vetor normal unitário $N = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ é constante, e portanto $dN \equiv 0$.*

Definição 6. *A forma quadrática II_p, definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$, é chamada a **segunda forma fundamental** de S em p.*

Definição 7. *Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p, e $\cos\theta = \langle n, N\rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é chamado a **curvatura normal** de $C \subset S$ em p.*

Considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C, com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\left\langle N(s), \alpha'(s)\right\rangle = 0$, donde

$$\left\langle N(s), \alpha''(s)\right\rangle = -\left\langle N'(s), \alpha'(s)\right\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\left\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\right\rangle \\ &= -\left\langle N'(0), \alpha'(0)\right\rangle = \left\langle N(0), \alpha''(0)\right\rangle \\ &= \langle N, kn\rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Em palavras, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v.

Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p.

Observamos que a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\left\langle dN(\alpha'), \alpha'\right\rangle = -\left\langle N_u u' + N_v v', \mathtt{x}_u u' + \mathtt{x}_v v'\right\rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde, já que $\langle N, \mathtt{x}_u \rangle = \langle N, \mathtt{x}_v \rangle = 0$,

$$e = -\langle N_u, \mathtt{x}_u \rangle = \langle N, \mathtt{x}_{uu} \rangle,$$

$$f = -\langle N_v, \mathtt{x}_u \rangle = \langle N, \mathtt{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathtt{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathtt{x}_v \rangle,$$

$$g = -\langle N_v, \mathtt{x}_v \rangle = \langle N, \mathtt{x}_{vv} \rangle.$$

As funções e, f e g são chamadas os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v\}$ de T_pS.

Definição 8. *O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2, são chamados **curvaturas principais** em p; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas **direções principais** em p.*

Definição 9. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \to T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a **curvatura Gaussiana** K de S em p. O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a **curvatura média** H de S em p.*

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2, podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Já em termos da primeira e da segunda formas fundamentais, as curvaturas Gaussiana e Média são dadas por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

No que se segue, S e $\overline{S}$ são superfícies regulares.

Definição 10. *Uma aplicação $\phi : S \to \overline{S}$, é uma **isometria** se ϕ é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_pS$, temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2) \rangle_{\phi(p)}.$$

*Diz-se então que as superfícies S e $\overline{S}$ são **isométricas**.*

Proposição 4. *Suponha a existência de parametrizações $\mathbf{x} : U \to S$ e $\overline{\mathbf{x}} : U \to \overline{S}$ tais que $E = \overline{E}$, $F = \overline{F}$, $G = \overline{G}$ em U. Então a aplicação $\phi = \overline{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to \overline{S}$ é uma isometria local.*

Agora, vamos associar a cada ponto de uma superfície um triedro e estudar as derivadas de seus vetores. Este estudo nos levará a um dos fatos mais importantes da geometria diferencial: o teorema egregium de Gauss.

Denotaremos por S uma superfície regular orientável e orientada. Seja $\mathtt{x} : U \subset I\!R^2 \to S$ uma parametrização na orientação de S. É possível associar a cada ponto de $\mathtt{x}(U)$ um triedro natural dado pelos vetores $\mathtt{x}_u$, $\mathtt{x}_v$ e N.

Expressando as derivadas dos vetores $\mathtt{x}_u$, $\mathtt{x}_v$ e N na base $\{\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v, N\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathtt{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathtt{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathtt{x}_v + L_1 N,\\
\mathtt{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathtt{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathtt{x}_v + L_2 N,\\
\mathtt{x}_{vu} &= \Gamma^1_{21}\mathtt{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathtt{x}_v + \overline{L}_2 N,\\
\mathtt{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathtt{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathtt{x}_v + L_3 N,\\
N_u &= a_{11}\mathtt{x}_u + a_{21}\mathtt{x}_v,\\
N_v &= a_{12}\mathtt{x}_u + a_{22}\mathtt{x}_v,
\end{aligned} \tag{1}$$

onde os a_{ij}, $i, j = 1, 2$ são dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \qquad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$
$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Os coeficientes Γ^k_{ij}, $i, j, k = 1, 2$ são chamados **símbolos de Christoffel** de S na parametrização $\mathtt{x}$. Como $\mathtt{x}_{uv} = \mathtt{x}_{vu}$, concluímos que $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$, e $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$; isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno das primeiras quatro relações em (1) com N, obtemos imediatamente $L_1 = e$, $L_2 = \overline{L}_2 = f$ e $L_3 = g$, onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S.

Para determinar os símbolos de Christoffel resolvemos os sistemas

$$\begin{cases}
\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \langle \mathtt{x}_{uu}, \mathtt{x}_u \rangle = \frac{1}{2}E_u,\\
\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = \langle \mathtt{x}_{uu}, \mathtt{x}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \langle \mathtt{x}_{uv}, \mathtt{x}_u \rangle = \frac{1}{2}E_v,\\
\Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \langle \mathtt{x}_{uv}, \mathtt{x}_v \rangle = \frac{1}{2}G_u,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathrm{x}_{vv}, \mathrm{x}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathrm{x}_{vv}, \mathrm{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

Todos os conceitos geométricos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias. Destacamos aqui três expressões que envolvem os símbolos de Christoffel e que são muito importantes:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK, \tag{2}$$

onde K é a curvatura Gaussiana, e

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \tag{3}$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \tag{4}$$

A equação (2) é conhecida como **fórmula de Gauss**, e as equações (3) e (4) são chamadas **equações de Mainardi-Codazzi**.

Seguem agora dois resultados importantes relacionados a essas equações.

Teorema 5. *(Teorema Egregium de Gauss). A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

Teorema 6. *(Bonnet). Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset I\!R^2$, com $E > 0, G > 0$. Suponha que as funções satisfaçam formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Codazi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U) \subset I\!R^3$ tal que a superfície regular $\mathbf{x}(U) \subset I\!R^3$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se U é conexo e se*

$$\widetilde{\mathbf{x}} : U \to \widetilde{\mathbf{x}}(U) \subset I\!R^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $I\!R^3$ tal que $\widetilde{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$.

4 Geometria Intrínseca e Superfícies Completas

Passemos agora à geometria intrínseca das superfícies e às superfícies completas.

Definição 11. *Seja w um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ e $p \in U$. Seja $y \in T_pS$. Considere uma curva parametrizada*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U,$$

*com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, e seja $w(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a restrição do campo de vetores w à curva α. O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano T_pS é chamado a **derivada covariante** em p do campo de vetores w em relação ao vetor y. Esta derivada covariante é denotada por $(Dw/dt)(0)$ ou $(D_yw)(p)$.*

A derivada Dw/dt não depende da curva α.

Definição 12. *Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to S$ é chamado **paralelo** se $Dw/dt = 0$ para todo $t \in I$.*

Proposição 7. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada em S e seja $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo $w(t)$ ao longo de $\alpha(t)$, com $w(t_0) = w_0$.*

Definição 13. *Seja $\alpha : I \to S$ uma curva parametrizada e $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Seja w um campo paralelo ao longo de α, com $w(t_0) = w_0$. O vetor $w(t_1)$, $t_1 \in I$ é chamado **transporte paralelo** de w_0 ao longo de α no ponto t_1.*

Definição 14. *Uma curva parametrizada, não constante, $\gamma : I \to S$ é chamada **geodésica** em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ em t; isto é*

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

*γ é uma **geodésica parametrizada** se é geodésica para todo $t \in I$.*

Definição 15. *Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \to S$ sobre uma superfície orientada S. Como $w(t)$, $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $(dw/dt)(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

*O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado **valor algébrico da derivada covariante** de w em t.*

Definição 16. *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S, e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C, em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento de arco s. O valor algébrico $[Dw/ds] = k_g$ da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamado **curvatura geodésica** de C em p.*

O valor absoluto da curvatura geodésica k_g de C em p é o valor absoluto da componente tangencial do vetor $\alpha^{''}(s) = kn$, onde k é a curvatura de C em p e n é o vetor normal de C em p. Assim, temos imediatamente que

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Proposição 8. *Dado um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_pS$, $w \neq 0$, existe um $\epsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma^{'}(0) = w$.*

Agora, iremos definir superfície completa, a fim de enunciar o Teorema de Hopf-Rinow, um teorema da geometria diferencial global. Isso porque, para obtermos teoremas globais precisamos, além da conexidade, de alguma hipótese global para assegurar que a superfície não possa ser "estendida" como uma superfície regular.

Definição 17. *Uma superfície regular conexa S é denominada* ***completa*** *quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \to S$ de S, começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \to S$, definida sobre toda a reta real $\mathbb{R}$.*

Exemplo 5.

1. *O plano é evidentemente uma superfície completa, pois suas geodésicas são as retas, e estas estão definidas em toda a reta real $\mathbb{R}$;*

2. *O cone menos o vértice não é uma superfície completa, pois quando estendemos suficientemente uma geratriz (que é uma geodésica) atingimos o vértice, que não pertence à superfície;*

3. *A esfera é uma superfície completa, pois as suas geodésicas parametrizadas (cujos traços são os grandes círculos da esfera) podem ser definidas para qualquer valor real;*

4. *O cilindro também é uma superfície completa, pois as suas geodésicas são círculos, retas e hélices, que estão definidas para todos os valores reais;*

5. *Uma superfície $S - \{p\}$, obtida ao removermos um ponto p de uma superfície completa S, não é completa. De fato, alguma geodésica γ de S deve passar por p. Tomando um ponto q, próximo a p em γ, existe uma geodésica parametrizada de $S - \{p\}$ que começa em q e não pode ser estendida até p.*

Dizemos que uma geodésica ligando dois pontos $p, q \in S$ é **minimizante** se o seu comprimento $l(\gamma)$ é menor do que ou igual ao comprimento de qualquer curva regular por partes ligando p a q.

Teorema 9. *(Hopf-Rinow). Seja S uma superfície completa. Dados dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q.*

As demonstrações dos resultados apresentados neste trabalho podem ser encontradas em [1].

5 Conclusão

Observamos neste trabalho que, apesar de a curvatura gaussiana ser definida a partir da segunda forma fundamental, ela depende apenas da primeira forma fundamental. Com este teorema, Gauss mostrou que muitos conceitos estudados são intrínsecos à superfície, isto é, não dependem do espaço ambiente no qual ela se encontra. A partir disso, fizemos um estudo dessa geometria intrínseca e, ao estudar as superfícies completas, iniciamos uma forma de se compreender uma métrica na superfície que não seja a métrica do espaço ambiente.

Em trabalhos posteriores, continuaremos este estudo sobre a geometria intrínseca das superfícies, abrangendo superfícies abstratas, superfícies abstratas que são conformemente planas e suas curvaturas gaussianas, e superfícies completas com curvatura gaussiana negativa.

Referências

[1] Do Carmo, Manfredo P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM, 4^a edição, 2010.

[2] Teneblat, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2^a edição, 2008. pp. 28-211.

[3] Do Carmo, Manfredo P. *Introdução à Geometria Diferencial Global*, Impa, 3^a edição, 2005.